浅谈一个构造局部不等式的方法

吴青昀

(江苏省常州高级中学高三(12)班,213003)

在解决与不等式证明有关的竞赛题时,构造局部不等式是很重要的思想方法之一,下面先通过一个引例来介绍这种方法.

引例　已知 $a\geqslant 0, b\geqslant 0, c\geqslant 0, a+b+c=1$,求证:$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\leqslant\frac{9}{10}$.

证明　首先,容易证明下面的局部不等式:

当 $x>0$ 时,$\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{18}{25}x+\frac{3}{50}$.

实际上,去分母且合并同类项后,上式即 $(3x-1)^2(4x+3)\geqslant 0$,显然成立.

于是有:$\frac{a}{1+a^2}\leqslant\frac{18}{25}a+\frac{3}{50}$,$\frac{b}{1+b^2}\leqslant\frac{18}{25}b+\frac{3}{50}$,$\frac{c}{1+c^2}\leqslant\frac{18}{25}c+\frac{3}{50}$.

三式相加,即得:$\frac{a}{1+a^2}+\frac{b}{1+b^2}+\frac{c}{1+c^2}\leqslant\frac{9}{10}$.

有些同学可能会问:为什么会想到局部不等式 $\frac{x}{1+x^2}\leqslant\frac{18}{25}x+\frac{3}{50}$ 呢?是硬凑出来的吗?回答是否定的,构造这种局部不等式是有方法的.

如果问题是以如下的形式出现:"已知 $x_i\geqslant 0$,$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=c$($c$ 为常数),求证:$\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\geqslant(\leqslant)A$(其中 A 为常数)",可以考虑用一种类似于运用函数凹凸性的方法构造局部不等式,这种方法比琴生不等式更强一些,计算量也稍稍小一些!

首先要找到等号成立的条件,若是在 x_i 都相等时等号成立(这种方法一般只用在这种情况,若不是这种情况,就需要有一定的技巧才能凑出适当的局部不等式,本文限于篇幅不再赘述).

考虑函数 $y=f(x)$ 在 $x=\frac{c}{n}$ 时的切线 $y=kx+b$,如果可以证明:对于一切在限定范围内的 x,都有 $f(x)\geqslant(\leqslant)kx+b$,那么结论显然成立.

容易求得 $k=f'(\frac{c}{n})$,$b=f(\frac{c}{n})-f'(\frac{c}{n})\times\frac{c}{n}$.

然后再想办法证明这个局部不等式 $f(x)\geqslant(\leqslant)kx+b$ 即可,注意到 $x=\frac{c}{n}$ 是 $f(x)-(kx+b)=0$ 的一个根,所以通常可以用因式分解的方式证明.

于是,引例中的 $\frac{18}{25}x+\frac{3}{50}$ 就很容易解释了:记 $f(x)=\frac{x}{1+x^2}$,则 $f'(x)=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$,于是 $k=f'(\frac{1}{3})=\frac{18}{25}$,$b=f(\frac{1}{3})-\frac{1}{3}\times\frac{18}{25}=\frac{3}{50}$.

我们可以通过下面的例子感受一下这种构造方法的威力以及基本过程.

例1　已知 x,y,z 是三角形的三边,证明:$\frac{y+z}{2x}+\frac{z+x}{2y}+\frac{x+y}{2z}\geqslant\frac{2x}{y+z}+\frac{2y}{z+x}+\frac{2z}{x+y}$.

分析:注意到要证的不等式是齐次的,故不妨设 $x+y+z=1$,要证的不等式转化为:

$$\sum\frac{(1-3x)(1+x)}{x(1-x)}\geqslant 0,$$

其中 Σ 表示循环和.

容易猜出,等号在 $x=y=z=\frac{1}{3}$ 时成立.

记 $f(x)=\frac{(1-3x)(1+x)}{x(1-x)}$,则 $f'(x)=\frac{-2(5x^2-2x+1)}{x^2(1-x)^2}$,于是 $k=f'(\frac{1}{3})=-18$,$b=f(\frac{1}{3})-\frac{1}{3}\times(-18)=6$.

下面证明:$\frac{(1-3x)(1+x)}{x(1-x)}\geqslant -18x+6$,即 $(3x-1)^2(2x-1)\leqslant 0$.

由 x,y,z 是三角形的三边知 $0<x,y,z<\frac{1}{2}$,所以上式显然成立.

同理可得:$\frac{(1-3y)(1+y)}{y(1-y)}\geqslant -18y+6$,

$\frac{(1-3z)(1+z)}{z(1-z)}\geqslant -18z+6$.

三式相加,即得

$$\sum\frac{(1-3x)(1+x)}{x(1-x)}\geqslant -18(x+y+z)+18=0.$$

说明　本题也可以把 x,y,z 放宽为任意正数，利用下面的结果完成证明：对任意正数 x,y,z，都有 $x(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})\geqslant\frac{4x}{y+z}$.

下面是一个基本类似的例子，不过这次似乎没有捷径可走.

例2　已知 $a,b,c\in\mathbf{R}^+$，求证：

$\sum\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}\geqslant\frac{3}{5}$，其中 Σ 表示循环和.

分析：注意到不等式是齐次的，不妨设 $a+b+c=1$（当然为了计算方便也可以设为3），易猜出等号当 $a=b=c=\frac{1}{3}$ 时成立，且

$$\sum\frac{(b+c-a)^2}{(b+c)^2+a^2}=\sum\frac{(1-2a)^2}{(1-a)^2+a^2}$$
$$=\sum\frac{4a^2-4a+1}{2a^2-2a+1}=6-\sum\frac{1}{2a^2-2a+1}.$$

于是原不等式转化为：$\sum\frac{1}{2a^2-2a+1}\leqslant\frac{27}{5}$.

设 $f(x)=\frac{1}{2x^2-2x+1}$，则 $f'(x)=-\frac{4x-2}{(2x^2-2x+1)^2}$，$k=f'(\frac{1}{3})=\frac{54}{25}$，$b=f(\frac{1}{3})-\frac{1}{3}k=\frac{27}{25}$，于是可改造局部不等式 $\frac{1}{2x^2-2x+1}\leqslant\frac{54}{25}x+\frac{27}{25}$.

事实上，$\frac{1}{2x^2-2x+1}\leqslant\frac{54}{25}x+\frac{27}{25}\Leftrightarrow(3x-1)^2(6x+1)\geqslant0$，显然成立！

故有：$\frac{1}{2a^2-2a+1}\leqslant\frac{54}{25}a+\frac{27}{25}$，$\frac{1}{2b^2-2b+1}\leqslant\frac{54}{25}b+\frac{27}{25}$，$\frac{1}{2c^2-2c+1}\leqslant\frac{54}{25}c+\frac{27}{25}$.

三式相加，即得：$\sum\frac{1}{2a^2-2a+1}\leqslant\frac{54}{25}(a+b+c)+3\times\frac{27}{25}=\frac{27}{5}$.

当然，事情往往不是一帆风顺的，有时使用这种方法时需要进行分类讨论，下面再举一个2007年西部数学奥林匹克的例子，一方面演示一下如何解决需要分类讨论的问题，一方面也供读者自己尝试如何使用这种方法解题.

例3　（2007年西部数学奥林匹克第三题）设实数 a,b,c 满足 $a+b+c=3$. 求证：

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\leqslant\frac{1}{4}.$$

分析：记 $f(x)=\frac{1}{5x^2-4x+11}$，则 $f'(x)=-\frac{10x-4}{(5x^2-4x+11)^2}$，于是

$$k=f'(1)=-\frac{1}{24},b=f(1)-1\times f'(1)=\frac{1}{8}.$$

事实上：$\frac{1}{5x^2-4x+11}\leqslant\frac{1}{24}(3-x)\Leftrightarrow5x^3-19x^2+23x-9\leqslant0\Leftrightarrow(x-1)^2(5x-9)\leqslant0\Leftrightarrow x\leqslant\frac{9}{5}$.

然后就需分类讨论.

(1) 若 a,b,c 都不超过 $\frac{9}{5}$，则有 $\frac{1}{5a^2-4a+11}\leqslant\frac{1}{24}(3-a)$，$\frac{1}{5b^2-4b+11}\leqslant\frac{1}{24}(3-b)$，$\frac{1}{5c^2-4c+11}\leqslant\frac{1}{24}(3-c)$.

三式相加，即得

$$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}$$
$$\leqslant\frac{1}{24}(3-a)+\frac{1}{24}(3-b)+\frac{1}{24}(3-c)=\frac{1}{4}.$$

(2) 若 a,b,c 中有一个大于 $\frac{9}{5}$，不妨设 $a\geqslant\frac{9}{5}$，则 $5a^2-4a+11=5a(a-\frac{4}{5})+11>5\cdot\frac{9}{5}\cdot(\frac{9}{5}-\frac{4}{5})+11=20$，

故 $\frac{1}{5a^2-4a+11}<\frac{1}{20}$.

又由于 $5b^2-4b+11=5(b-\frac{2}{5})^2+\frac{51}{5}\geqslant\frac{51}{5}>10$，所以 $\frac{1}{5b^2-4b+11}<\frac{1}{10}$.

同理，$\frac{1}{5c^2-4c+11}<\frac{1}{10}$.

所以，$\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}<\frac{1}{20}+\frac{1}{10}+\frac{1}{10}=\frac{1}{4}$.

综合可知，总有 $\frac{1}{5a^2-4a+11}+\frac{1}{5b^2-4b+11}+\frac{1}{5c^2-4c+11}\leqslant\frac{1}{4}$，当且仅当 $a=b=c=1$ 时等号成立.

构造局部不等式证明不等式问题是一种常见的技巧，它常常能解决一些琴生不等式解决不了的问题. 笔者希望本文能给你带来一丝启发，同时也祝愿大家的不等式解题水平更上一层楼！